КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КОЛЬЦА, ПОДКРЕПЛЕННОГО УПРУГИМИ ТОНКИМИ СТЕРЖНЯМИ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕСОВОЙ НАГРУЗКИ

Андрюкова В.Ю. [1], Тарасов В.Н. [1]

[1] *Физико-математический институт ФИЦ Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар*
veran@list.ru, vntarasov@dm.komisc.ru

Пусть упругое кольцо подкреплено тонкими стержнями (спицами), соединенными в центре и нагружено силой P. Обозначим через $w = w(\varphi)$ радиальное перемещение точек кольца, R - радиус кольца, B - жесткость на изгиб, E - модуль Юнга, F - площадь поперечного сечения спицы, n - число спиц. Предполагая, что число спиц настолько велико, что их можно считать упругой средой. В [1] получено дифференциальное уравнение $w^V + 2w''' + a^2 w' = 0$, где a^2 - константа, определяемая через R, B, E, F. Данная задача в такой постановке впервые была рассмотрена Н.Е. Жуковским, недостатком его подхода является то, что центр кольца считается неподвижным. Введем v - перемещение центра кольца. Тогда деформации могут быть определены путем решения вариационной задачи

$$J = \frac{B}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\varphi + \frac{EF}{2R}\sum_{j=1}^{n}(w(\varphi_i) + v\sin\varphi_i)^2 - Pv \to \min_{w,v} \tag{1}$$

при ограничениях

$$(R - w)\cos\varphi - u\sin\varphi \geq R, \tag{2}$$

где $u(\varphi)$ - касательное перемещение точек кольца. Неравенство (2) означает, что кольцо находится над жестким препятствием. Если предположить, что спицы могут потерять устойчивость в результате сжимающих усилий, то задача сводится к негладкой вариационной проблеме

$$J = \frac{B}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\varphi + \frac{EF}{2R}\sum_{j=1}^{n}(-w(\varphi_i) - v\sin\varphi_i)_+^{\ 2} - Pv \to \min_{w,v}. \tag{3}$$

В (3) использовано обозначение $t_+ = \max\{0, t\} = \frac{|t| + t}{2}$. Усилия в спицах и изгибающий момент в кольце при решении задач (1) - (2) или (2) - (3) в несколько раз отличаются от аналогичных величин, приведенных в [1]. Другие задачи, сводимые к вариационным проблемам при наличии ограничений в виде неравенств, описаны авторами в [2].

Литература

[1] Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов – Москва, 1967. – 376 с.
[2] Andryukova V.Yu., Tarasov V.N. Nonsmooth problem of stability for elastic rings – Saint Petersburg, 2017. Abstracts of the international conference «Constructive nonsmooth analysis and related topics». Part I, p. 213–218.